不動点定理と凸不等式(非線形解析学と数理経済学の研究)

高橋, 渉

数理解析研究所講究録
861巻 1994年 33-50

不動点定理と凸不等式

東工大理 高橋 渉 (Wataru Takahashi)

線形問題から非線形問題へうつる1つの過程において，凸関数に関する問題があるが，ここでいう凸不等式とは，n個の凸関数の不等式の問題をいう．線形不等式に関する定理は線形計画法などの線形最適化問題で有用であるが，凸不等式に関する定理はやはり非線形解析学で有用な道具となっている．Fan [5] は凸不等式に関するつぎの定理を証明した．

定理A (Fan) Xを線形位相空間のコンパクトで凸な集合とし，$f_1, f_2, \cdots, f_n$ をX上で定義され，実数に値をもつ下半連続で凸なn個の関数とする．このとき，つぎの条件(1)と(2)は同値である．

(1) n個の不等式のシステム

$$f_i(x) \leqq c \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

は解をもつ．

(2) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ となる非負な数$\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$に対して

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(y) \leqq c$$

となる $y \in X$ が存在する.

この定理はminimax定理, またはFan-Browderの不動点定理を用いて証明されるが, それはいろいろな存在定理を証明する上でも重要なものとなっている.

一方, 1975年にBaillon [1] によって最初の非線形エルゴード定理が証明された.

定理B (Baillon)　C をHilbert空間 H の閉で凸な集合とし, T を C から C への非拡大写像とする. このとき, T の不動点の集合 $F(T)$ が空でないならば, 任意の $x \in C$ に対して

$$S_n x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} T^i x$$

は $F(T)$ の元に弱収束する.

この定理は, 集合

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{co} \{ T^n x : n \geqq m \} \cap F(T)$$

が1点からなるという事実より証明されるが, この事実はまた種々の収束定理を証明する上でも重要なものとなっている.

ここでは, 非拡大写像の不動点定理とこの種の収束定理をいくつか証明するとともに, 凸不等式に関するFanの定理の

有用性，凸不等式の解と収束定理との関わりなどを調べてみたい．

§1　凸不等式の解への近似法

Fan の定理（定理 A）において

$$C_i=\{x\in X:\ f_i(x)\leqq c\}\ (i=1,2,\cdots,n)$$

とおくと，C_i は閉凸集合となる．また，n 個の不等式のシステム $f_i(x)\leqq c$ $(i=1,2,\cdots,n)$ が解をもつということは

$$\bigcap_{i=1}^{n} C_i \neq \phi$$

ということに他ならない．Fan の定理は $\bigcap_{i=1}^{n} C_i\neq\phi$ であるための必要十分条件を与えたものである．

それでは，$\bigcap_{i=1}^{n} C_i\neq\phi$ であるときの $\bigcap_{i=1}^{n} C_i$ の元を求める近似法はないのだろうか．Crombez [4] は Hilbert 空間において，次のような収束定理を証明した．

定理 C（Crombez）　H を Hilbert 空間とし，C_i $(i=1,2,\cdots,n)$ を $\bigcap_{i=1}^{n} C_i\neq\phi$ となる H の閉凸集合の族とする．P_i を H から C_i への metric projection とし，

$$T_i=(1-\lambda_i)I+\lambda_i P_i\ ,\quad 0<\lambda_i<2$$

とする．また

$$T=\alpha_0 I+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i T_i\ ,$$

$$\alpha_i>0\ (i=0,1,2,\cdots,n),\quad \sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$$

とする．このとき，任意の元 $x \in H$ に対して，$\{T^n x\}$ は $\bigcap_{i=1}^{n} C_i$ の元に弱収束する．

この定理は Hilbert 空間における $\bigcap_{i=1}^{n} C_i$ の元をもとめる近似法である．この定理は最近，北原－高橋[9]により，非線形エルゴード定理を証明する方法によって Banach 空間の場合にまで拡張されたので，この節ではそれを紹介しておこう．

E を Banach 空間とし，C を E の空でない閉凸集合とする．C から E への写像 T は

$$\|Tx - Ty\| \leqq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in C$$

を満たすならば非拡大写像 (nonexpansive) であるといわれる．写像 T に対して，$F(T)$ で T の不動点全体の集合を，$R(T)$ で T の値域を表すことにする．C から E への写像 T は，任意の元 $x \in C$ に対して

$$\|T^n x - T^{n+1} x\| \to 0$$

を満たすなら asymptotically regular であるといわれる．D を C の部分集合とし，P を C から D への写像とする．P が，$x \in C$ と $t \geqq 0$ に対して，$Px + t(x - Px) \in C$ であるとき

$$P(Px + t(x - Px)) = Px$$

を満たすなら sunny であるといわれる．$P^2 = P$ を満たす C から C への写像は retraction といわれる．D を C の部分集合とする．このとき，C から D への sunny nonexpansive retraction が

存在するなら，Dは sunny nonexpansive retract といわれる．Hilbert空間の空でない閉凸集合が sunny nonexpansive retract であることはよく知られた事実である．しかしながら，Banach空間ではこの事実は一般にはいえない．

Eを Banach 空間とし

$$U = \{ x \in E \; ; \; \|x\| = 1 \}$$

とする．このとき，$x, y \in U$ に対して

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

を考える．この極限 (*) が，$x, y \in U$ に対して常に存在するとき，Eのノルムは Gâteaux微分可能であるといわれる．それはまた，$x \in U$ を固定したとき，y に関して一様に収束するならば，Fréchet 微分可能であるといわれる．この極限(*)が $(x, y) \in U \times U$ に対して一様に収束するならば，Eのノルムは一様Fréchet微分可能であるといわれる．

Bruck [3]（または平野 [6]，Lau-高橋 [10] を見よ）は次の定理を証明した．

定理D (Bruck)　EをFréchet微分可能なノルムをもつ一様凸なBanach空間とする．CをEの空でない閉凸集合とし，TをCからCへの nonexpansive 写像とする．このとき

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{co} \{ T^n x \; ; \; n \geq m \} \cap F(T)$$

は高々1点からなる．

この定理を用いると，次の定理が証明できる．

定理E　EをFréchet微分可能なノルムをもつ一様凸なBanach空間とする．CをEの空でない閉凸集合とし，Tを$F(T) \neq \phi$となるCからCへのasymptotically regular nonexpansive写像とする．このとき，任意の元$x \in C$に対して，$\{T^n x\}$は$F(T)$の元に弱収束する．

証明　$x \in C$とし，$y \in F(T)$とする．また，Bを中心y，半径$\|x-y\|$の閉球とする．このとき，集合$K = C \cap B$は有界であり，Tのもとで不変でもある．そこで[2]より$I-T$はK上でdemiclosedである．すなわち，$x_n \to z$（弱収束），$x_n - Tx_n \to 0$（強収束）ならば，$(I-T)z = 0$である．$F(T) \neq \phi$より，$\{T^n x\}$は有界である．Eは一様凸なので，$\{T^n x\}$の部分点列$\{T^{n_i} x\}$が存在し，それがKの元zに弱収束する．またTはasymptotically regularなので，$(I-T)T^{n_i} x \to 0$でもある．ここでTのdemiclosed性を用いると，$z = Tz$を得る．定理Dより

$$\{z\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{co}\{T^n x : n \geq m\} \cap F(T)$$

なので，$\{T^n x\}$はzに弱収束する．

Hilbert空間の場合にCrombez [4]が用いたideaを使うと次の定理が証明できる．

定理F（北原－高橋）　Eを一様凸なBanach空間とし，CをEの空でない閉凸集合とする．$S_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ をC上のnonexpansive写像とし，Sを

$$S=\beta_0 I+\sum_{i=1}^{n}\beta_i S_i,\ 0<\beta_i<1\ (i=0,1,2,\cdots,n),$$
$$\sum_{i=0}^{n}\beta_i=1$$

によって定義されるC上のnonexpansive写像とする．このとき，$\bigcap_{i=1}^{n}F(S_i)\neq\phi$ であるなら，Sはasymptotically regularである．

証明　$x\in C$ とし，$u\in F(S)$ とする．$x\neq u$ としても一般性を失わないので $x\neq u$ と仮定する．

$$x_m=S^m x\ (m=0,1,2,\cdots)$$

と置くと，Sはnonexpansiveなので，$\{\|x_m-u\|\}$ は非増加である．また，

$$x_{m+1}-u=Sx_m-u$$
$$=\beta_0(x_m-u)+(1-\beta_0)\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i}{1-\beta_0}(S_i x_m-u)$$

から，$z_m=\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i}{1-\beta_0}(S_i x_m-u)$ と置くと

$$x_{m+1}-u=\beta_0(x_m-u)+(1-\beta)z_m$$

となる．よって

$$\begin{aligned}\|z_m\| &= \left\|\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i}{1-\beta_0}(S_i x_m - u)\right\| \\ &\leqq \sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i}{1-\beta_0}\|S_i x_m - u\| \\ &\leqq \sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i}{1-\beta_0}\|x_m - u\| \\ &= \|x_m - u\|\end{aligned}$$

となり，$\|z_m\| \leqq \|x_m - u\|$ を得る．今や $\{x_m - u - z_m\}$ が 0 に収束する部分点列をもつことを証明しよう．もしそうでないとすると，ある $\varepsilon > 0$ とある自然数 m_0 が存在し，すべての $m \geqq m_0$ に対して，$\|x_m - u - z_m\| \geqq \varepsilon$ となる．E が一様凸であることを使うと，

$$\begin{aligned}\|x_{m+1} - u\| &= \|\beta_0(x_m - u) + (1-\beta_0)z_m\| \\ &\leqq \|x_m - u\|\left\{1 - 2\beta_0(1-\beta_0)\delta\left(\frac{\varepsilon}{\|x-u\|}\right)\right\} \\ &\ \ \vdots \\ &\leqq \|x_{m_0} - u\|\left\{1 - 2\beta_0(1-\beta_0)\delta\left(\frac{\varepsilon}{\|x-u\|}\right)\right\}^{m+1-m_0}\end{aligned}$$

を得る．ここで $0 < \beta_0 < 1$ であるので，

$$\lim_{m\to\infty}\|x_m - u\| = 0 = \lim_{m\to\infty}\|z_m\|$$

を得る．だから $\{x_m - u - z_m\}$ は 0 に収束する．これは矛盾である．そこである部分列 $\{x_{m_i} - u - z_{m_i}\}$ は 0 に収束する．

$\{\|x_m - x_{m+1}\|\}$ は非増加なので，そして

$$x_m - x_{m+1} = x_m - \{u + \beta_0(x_m - u) + (1-\beta_0) z_m\}$$
$$= (1-\beta_0)(x_m - u - z_m)$$

なので，$x_m - x_{m+1}$ は 0 に収束する．

$$x_m - x_{m+1} = S^m x - S^{m+1} x$$

であることから，S は asymptotically regular であることがわかる．

次の補助定理は定理6を証明する上で本質的である．

補助定理　E を狭義凸な Banach 空間とし，C を E の閉凸集合とする．P を C から D の上への sunny nonexpansive retraction とし，$x \in C$ とする．このとき，ある $y \in D$ に対して，$\|Px - y\| = \|x - y\|$ ならば $Px = x$ である．

証明　$x \neq y$ を仮定するかも知れない．P は sunny であり，$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}Px \in C$ であるので

$$P\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}Px\right) = P\left(Px + \frac{1}{2}(x - Px)\right) = Px$$

である．そこで

$$\|Px - y\| = \left\|P\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}Px\right) - Py\right\|$$
$$\leqq \left\|\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}Px - y\right\|$$
$$= \left\|\frac{1}{2}(x - y) + \frac{1}{2}(Px - y)\right\|$$

$$\leqq \frac{1}{2}\|x-y\| + \frac{1}{2}\|Px-y\|$$
$$\leqq \|x-y\|$$

を得る．そして $\|Px-y\| = \|\frac{1}{2}(x-y) + \frac{1}{2}(Px-y)\| = \|x-y\|$ を得る．一方 $Px \neq x$ を仮定すると，$Px-y \neq x-y$ である．E は狭義凸であり，$\|Px-y\| = \|x-y\|$ であるので，

$$\left\|\frac{1}{2}(Px-y) + \frac{1}{2}(x-y)\right\| < \|x-y\|$$

を得る．これは矛盾である．よって，$Px = x$ である．

定理G（北原－高橋）　Eを狭義凸なBanach空間とし，CをEの閉凸集合とする．$C_1, C_2, \cdots, C_n$ をCのsunny nonexpansive retracts とし，$\bigcap_{i=1}^{n} C_i \neq \phi$ とする．Tを

$$T = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T_i,\ 0 < \alpha_i < 1\ (i=1,2,\cdots,n),\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$$

で定義されるC上の作用素（ただし，

$T_i = (1-\lambda_i)I + \lambda_i P_i$，$0 < \lambda_i < 1$，

P_i はCから C_i の上へのsunny nonexpansive retraction

である）とするとき，

$$F(T) = \bigcap_{i=1}^{n} C_i$$

である．

今やBanach空間において目的の$\bigcap_{i=1}^{n} C_i$の元をもとめる近似法が証明できる．

定理H（北原－高橋）　EをFréchet微分可能なノルムをもつ一様凸なBanach空間とし，CをEの閉凸集合とする．$C_1, C_2, \cdots, C_n$をCのsunny nonexpansive retractとし，$\bigcap_{i=1}^{n} C_i$が空でないとする．このとき，

$$T = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T_i, \quad 0 < \alpha_i < 1 \ (i = 1, 2, \cdots, n), \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,$$

$$T_i = (1 - \lambda_i) I + \lambda_i P_i, \ 0 < \lambda_i < 1$$

P_iはCからC_iの上へのsunny nonexpansive retraction

とするなら，$F(T) = \bigcap_{i=1}^{n} C_i$であり，さらに，$x \in C$に対して，$\{T^n x\}$は$F(T)$の元に弱収束する．

証明　Eは一様凸であるから，狭義凸なBanach空間となる．定理Gによって，$F(T) = \bigcap_{i=1}^{n} F(T_i) = \bigcap_{i=1}^{n} C_i$である．まず$\alpha_1 \lambda_1 < \beta_1 < \alpha_1$となるように$\beta_1$をとる．そして$\mu_1 = \frac{\alpha_1 \lambda_1}{\beta_1}$とおく．すると$0 < \beta_1 < 1$，$0 < \mu_1 < 1$であり，

$$\begin{aligned}
\alpha_1 T_1 &= \alpha_1 \{ (1 - \lambda_1) I + \lambda_1 P_1 \} \\
&= \alpha_1 I - \alpha_1 \lambda_1 I + \alpha_1 \lambda_1 P_1 \\
&= (\alpha_1 - \beta_1) I + \beta_1 I - \mu_1 \beta_1 I + \mu_1 \beta_1 P_1 \\
&= (\alpha_1 - \beta_1) I + \beta_1 \{ (1 - \mu_1) I + \mu_1 P_1 \}
\end{aligned}$$

である．そこで，$T_1' = (1-\beta_1)I + \beta_1 P_1$ と置くと，T_1' は非拡大写像であり，

$$T = \alpha_1 T_1 + \sum_{i=2}^{m} \alpha_i T_i = (\alpha_1 - \beta_1) I + \beta_1 T_1' + \sum_{i=2}^{m} \alpha_i T_i$$

となる．定理Fによって，Tはasymptotically regularである．そこで定理Eから，任意の$x \in C$に対して，$\{T^n x\}$は$F(T)$の元に弱収束する．

§2　Sunny Nonexpansive Retractions

この節では，§1で話題となったsunny nonexpansive retractionの存在について議論する．それを議論する前に2，3の定義を与えておく．

EをBanach空間とする．多価写像$A \subset E \times E$が増大作用素(accretive operator)であるとは，$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$に対してつねに

$$(y_1 - y_2, j) \geq 0$$

となる$j \in J(x_1 - x_2)$が存在するときをいう．Aを増大作用素とし，$\lambda > 0$とすると

$$J_\lambda x = \{z \in E : z + \lambda A z \ni x\}$$

で定義される多価写像（実は一価写像となってしまい，$J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$と書かれる）はAのresolventと呼ばれ，その定義域は$R(I + \lambda A)$であり，その値域は$D(A)$である．J_λ

からAの吉田近似といわれる $A_\lambda=\frac{1}{\lambda}(I-J_\lambda)$ も定義できるが，J_λ，A_λ の性質については[17]を参照するとよい．

Sunny nonexpansive retraction の存在をいうにあたっては，次の定理が重要である[18]．

定理I（高橋－上田）　Eを一様凸で，一様Fréchet微分可能なノルムをもつBanach空間とし，$A\subset E\times E$ を値域条件を満たす増大作用素とする．CをEの空でない閉凸集合で，

$$\overline{D(A)}\subset C\subset \bigcap_{r>0}R(I+rA)$$

を満たすものとする．このとき，$0\in R(A)$ ならば，任意の $x\in C$ に対して $\lim_{t\to\infty}J_t x$ が存在して，その極限は $A^{-1}0$ に属する．

これを用いて次の定理が証明できる．その前に補助定理を1つ与えておく[17]．

補助定理　EをGâteaux微分可能なノルムをもつBanach空間とし，CをEの凸集合とする．また $D\subset C$ とし，PをCからDの上へのretractionとする．このとき，任意 $x\in C$ と $y\in D$ に対して，$(x-Px, J(Px-y))\geq 0$ がつねに成り立つならば，Pはnonexpansiveであり，かつsunnyである．

定理J　Eを一様凸で，一様Fréchet微分可能なノルムをもつBanach空間とし，CをEの閉凸集合とする．TをCからCへのnonexpansive写像とし，$F(T)\neq\phi$ とする．このとき，$F(T)$

はCのsunny nonexpansive retractである．

証明　$A=I-T$ とおく．このとき A は $C=D(A)\subset\bigcap_{r>0}R(I+rA)$ を満たす accretive作用素である[17]．また $A^{-1}0=F(T)$ でもある．定理Iによって，すべての $x\in C$ に対して $\lim_{t\to\infty}J_tx$ は存在する．いま $Px=\lim_{t\to\infty}J_tx$ と置くと，P は C から $F(T)$ の上へのsunny nonexpansive retractionである．実際 $x\in C$, $z\in A^{-1}0$ に対して

$$(x-J_tx-0,\ J(J_tx-z))\geqq 0\quad(\forall t>0)$$

であるが，$Px=\lim_{t\to\infty}J_tx$ であるので

$$(x-Px,\ J(Px-z))\geqq 0$$

となる．よって補助定理より P はsunny nonexpansive retractionである．

§3　Fanの凸不等式のシステム定理

この節ではFanの凸不等式のシステム定理の拡張とその応用について述べることにしよう．まずFanのシステム定理からコンパクト性と凸性をはずした定理と関数 f_i の値が $(-\infty,\infty]=\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ となるような定理を紹介しておこう．定理Aからコンパクト性と凸性をはずすと次の定理となる[16]．

定理K　X をある集合，$f_1,f_2,\cdots,f_n$ を X 上の実数値関数とする．$I=\{1,2,\cdots,n\}$ とし，$X\times I$ 上の関数 F を

$$F(x,i)=f_i(x)\quad(\forall i\in I,\ \forall x\in X)$$

とする．また，Fを第1変数に関してはconvexlikeであるとし，$c\in\mathbb{R}$とする．このとき，$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$となるn個の非負な数$\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$に対して，$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x_0)\leqq c$となる$x_0\in X$が存在するなら

$$\inf_{x\in X}\max_i f_i(x)\leqq c$$

である．

これを用いると，関数f_iの値が$(-\infty,\infty]$となるようなFanのシステム定理が証明できる[13]．

定理L（塩路－高橋）　Xを線形位相空間Eのコンパクトで凸な集合とする．$f_1, f_2, \cdots, f_n$をXから$(-\infty,\infty]$に値をとる下半連続で凸な関数とする．このとき，つぎの命題(1)と(2)は同値である．

(1) 凸不等式のシステム

$$f_i(x)\leqq 0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

がX上で解をもつ．

(2) $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$となる非負な数$\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$に対して

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(y)\leqq 0$$

となる$y\in X$が存在する．

これからつぎの定理も得られる．

定理M　Xを線形位相空間Eの空でないコンパクトな凸集合とする．$\{f_\nu : \nu\in I\}$をXから$(-\infty,\infty]$に値をとる下半連続

で凸な関数の族とする．このときつぎの命題は同値である．

(1) 凸不等式のシステム

$$f_\nu(x) \leqq 0 \quad (\forall \nu \in I)$$

がX上で解をもつ．

(2) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ となる n 個の非負な数 $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ と $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n \in I$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_{\nu_i}(x) \leqq 0$$

となる $x \in X$ が存在する．

定理Kを用いるとSimons [14] によって証明された一般的なminimax定理が比較的簡単に証明できる[16]．Fanは彼の凸不等式のシステム定理を用いるとHardy-Littlewood-Pólyaの定理が簡単に証明できることを見つけた．この手法を用いて，酒巻－高橋[12]は彼らの定理を無限次元に拡張することを試みた．またFanのシステム定理はMarkov-Kakutaniの不動点定理を介在にすると，Hahn-Banach定理の拡張であるMazur-Orliczの定理やKönigの定理の証明にも有効である[7], [16]．塩路－高橋[13]はこれを用いて種々のゲームのcoreを論じた．そこでは新しくT-coreなるものが定義され，Delbaenの定理などが拡張された形で証明された．このようにFanのシステム定理は純粋数学においてはもちろんのこと応用数学においても非常に有効な定理となっている．

References

[1] Baillon, J. B., Un théorème de type ergodic pour les contraction non linéaires dans un espace de Hilbert, C.R. Acad. Sci. Paris, 280 (1975), 1511–1514.

[2] Browder, F. E., Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution in Banach spaces, Proc. Symp. Pure Math., 100-2, Amer. Math. Soc. Providence, R.I., 1976.

[3] Bruck, R.E., A simple proof of the mean ergodic theorem for nonlinear contractions in Banach spaces, Israel J. Math., 32 (1979), 107–116.

[4] Crombez, G., Image recovery by convex combinations of projections, J. Math. Anal. Appl., 155 (1991), 413–419.

[5] Fan, K., Existence theorems and extreme solutions for inequalities concerning convex functions or linear transformations, Math. Z., 68 (1957), 205–217.

[6] Hirano, N., A proof of the mean ergodic theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 78 (1980), 361–365.

[7] Hirano, N., Komiya, H., and W. Takahashi, A generalization of the Hahn-Banach theorem, J. Math. Anal. Appl., 88 (1982), 333–340.

[8] Kirk, W. A., A fixed point theorem for mappings which do not increase distances, Amer. Math. Monthly, 72 (1965), 1004–1006.

[9] Kitahara, S., and W. Takahashi, Image recovery by convex combinations of sunny nonexpansive retractions, to appear in Top. Methods in Nonlinear Anal..

[10] Lau, A.T., and W. Takahashi, Weak convergence and nonlinear ergodic theorems for reversible semigroup of nonexpansive mappings, Pacific J. Math., 126 (1987), 277-294.

[11] Reich, S., Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces, J. Math. Anal. Appl., 75 (1980), 287-292.

[12] Sakamaki, K., and W. Takahashi, Systems of convex inequalities and their applications, J. Math. Anal. Appl., 70 (1979), 445-459.

[13] Shioji, N., and W. Takahashi, Fan's theorem concerning systems of convex inequalities and its applications, J. Math. Anal. Appl., 135 (1988), 383-398.

[14] Simons, S., Two function theorems and variational inequalities for functions on compact and noncompact sets, with some comments on fixed point theorems, Proc. Symp. Pure Math, Amer. Math. Soc., 45 (1986), 377-392.

[15] Takahashi, W., Nonlinear va ational inequalities and fixed point theorems, J. Math. Soc. Japan, 28 (1976), 168-181.

[16] Takahashi, W., Fixed point, minimax, and Hahn-Banach theorems, Proc. Symp. Pure Math., Amer. Math. Soc., 45 (1986), 419-427.

[17] 高橋 渉, 非線形関数解析学, 近代科学社, 1988.

[18] Takahashi, W., and Y. Ueda, On Reich's strong convergence theorems for resolvents of accretive operators, J. Math. Anal. Appl., 104 (1984), 546-553.